第2讲 一次函数的图像与性质

**知识梳理**

**1．一次函数图像的画法**

一次函数*y*=*kx*+*b*(*k*、*b*是常数，且*k*≠0)的图像是一条直线，通常也称直线*y*=*kx*+*b*.由于两点确定一条直线，故画一次函数的图像时，只要先描出两点，再连成直线就可以了，为了方便，常取图像与坐标轴的两个交点\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**2．一次函数的截距与斜率**

一条直线与*y*轴的交点的纵坐标叫做这条直线在*y*轴上的截距，简称直线的**截距**.

一般地，直线*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)与*y*轴的交点坐标是(0，*b*).直线*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)的截距是***b***.

**3．直线*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)与坐标轴的交点**

(1)当*b*=0时，直线*y*=*kx*与*x*轴、*y*轴的交点都是(0，0)；

(2)当*b*≠0时，直线*y*=*kx*+*b*与*x*轴交点坐标为与*y*轴交点坐标为(0，*b*).

**4．一次函数的倾斜程度（斜率）**

在坐标平面上画直线*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)，截距*b*相同的直线经过同一点(0，*b*)；而由于*k*的值不同，则直线相对于*x*轴正方向的倾斜程度不同.这个常数*k*称为直线的**斜率**.

**5．平行直线**

一般地，一次函数*y*=*kx*+*b*(*b*≠0)的图像可由正比例函数*y*=*kx*的图像平移得到.当*b*>0时，向上平移*b*个单位；当*b*<0时，向下平移|*b*|个单位.

更进一步，如果*b*1≠*b*2，那么直线*y*=*kx*+*b*1与直线*y*=*kx*+*b*2平行.

反过来，如果直线*y*=*k*1*x*+*b*1与直线*y*=*k*2*x*+*b*2平行，那么*k*1=*k*2，*b*1≠*b*2.

←可利用直线*y*=*kx*和平行线的传递性进行说理.

**6．一次函数的性质**

一次函数*y*=*kx*+*b*(*k*、*b*为常数，*k*≠0)有下列性质：

(1)当*k*>0时，一次函数图像过\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，这时函数的图像从左到右上升；

(2)当*k*<0时，一次函数图像过\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，这时函数的图像从左到右下降.

进一步地，我们有一次函数*y*=*kx*+*b*的性质：

(1)*k*\_\_\_\_\_\_\_\_0，*b*\_\_\_\_\_\_\_\_0，一次函数图像过第一、二、三象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值也随着逐渐增大.

(2)*k*\_\_\_\_\_\_\_\_0，*b*\_\_\_\_\_\_\_\_0，一次函数图像过第一、三、四象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值也随着逐渐增大.

(3)*k*\_\_\_\_\_\_\_\_0，*b*\_\_\_\_\_\_\_\_0，一次函数图像过第一、二、四象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值则随着逐渐减小.

(4)*k*\_\_\_\_\_\_\_\_0，*b*\_\_\_\_\_\_\_\_0，一次函数图像过第二、三、四象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值则随着逐渐减小.

一次函数*y*=*kx*+*b*(*k*、*b*为常数，*k*≠0)有下列性质：

(1)当*k*>0时，一次函数图像过一、三象限，*y*随*x*的增大而增大，这时函数的图像从左到右上升；

(2)当*k*<0时，一次函数图像过二、四象限，*y*随*x*的增大而减小，这时函数的图像从左到右下降.

进一步地，我们有一次函数*y*=*kx*+*b*的性质：

(1)*k*>0，*b*>0，一次函数图像过第一、二、三象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值也随着逐渐增大.

(2)*k*>0，*b*<0，一次函数图像过第一、三、四象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值也随着逐渐增大.

(3)*k*<0，*b*>0，一次函数图像过第一、二、四象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值则随着逐渐减小.

(4)*k*<0，*b*<0，一次函数图像过第二、三、四象限，自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值则随着逐渐减小.

**典型解析**

**一、一次函数的图像**

**例1：**画出下列一次函数的图像：*y*=2*x*+1，*y*=2*x*-1，*y*=-2*x*+1，*y*=-2*x*-1.

**例2：一次函数图像的截距**

下列说法中错误的个数是( ).

①一次函数*y*=*kx*+*b*中，截距*b*可以为0；

②*y*=*kx*+*b*与*y*轴的交点在*y*轴的正半轴上；

③函数是一次函数，它在*y*轴上的截距是-1；

④函数是一次函数，它在*y*轴上的截距是-1；

⑤函数是一次函数，它在*y*轴上没有截距；

⑥函数是一次函数，它在*y*轴上的截距是2.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

答案：C

**例3：**若一次函数*y*=*k*(*x*+1)-2的图像在*y*轴上的截距是-4，求这个一次函数的解析式.

答案：*y*=-2*x*-4

**【变式训练】**

1．已知一次函数*y*1=(*m*2-4)*x*+1-*m*与*y*2=(*m*2-2)*x*+*m*2-3的图像在*y*轴上的截距互为相反数，则这两个函数的解析式分别为*y*1=\_\_\_\_\_\_\_，*y*2=\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-3*x*+2；-*x*-2

2．已知一次函数的图像经过点(4，-2)，并且在*y*轴上的截距为5，求这个一次函数的解析式，并画出其图像．

答案：设*y*=*kx*+5(*k*≠0)，代入(4，-2)，得*y*=*x*+5，图像略

**例4：一次函数图像与坐标轴的交点**

已知直线*l*：*y*=-3*x*+6与*x*轴的交点是*A*，与*y*轴的交点是*B*.

(1)求点*A*和点*B*的坐标；

(2)求直线与坐标轴围成的图形面积；

(3)求原点到直线*l*的距离.

答案：(1)*A*(2，0)，*B*(0，6)；(2)面积=×2×6=6；(3)*AB*=2，用面积法：2·*h*=12，*h*=

**【变式训练】**

若直线*y*=3*x*+*b*与两坐标轴围成的三角形面积是6，求截距*b*的值.

答案：求出直线与两坐标轴交点坐标(，0)、(0，*b*)，面积=得*b*=±6

**例5：一次函数图像的倾斜程度（斜率）**

在同一直角坐标系中画出下列直线：

(1)直线； (2)直线*y*=3*x*+2； (3)直线*y*=-2*x*+2； (4)直线

这四条直线的截距都是2，可知它们都过点*M*(0，2)；再由各直线相应的一次函数解析式，可知点*A*(3，3)、*B*(1，5)、*C*(2，-2)、*D*(3，1)分别在(1)、(2)、(3)、(4)所要画出的直线上.

在直角坐标系中，分别描出点*M*、*A*、*B*、*C*、*D*，再画出直线*MA*、*MB*、*MC*、*MD*，则直线*MA*、*MB*、*MC*、*MD*依次为(1)、(2)、(3)、(4)所要求画出的直线，如图所示.

Image13

**【变式训练】**

已知直线*y*=2*x*+1，若直线*y*=*kx*+*b*与该直线关于*y*轴对称，求*k*、*b*的值.

答案：*k*=-2，*b*=1

**例6：平行直线**

画出下列函数的图像，并比较各对一次函数的图像有什么共同点，有什么不同点？

(1) *y*=-3*x*与*y*=-3*x*+2； (2) *y*=*x*与*y*=*x*+2.

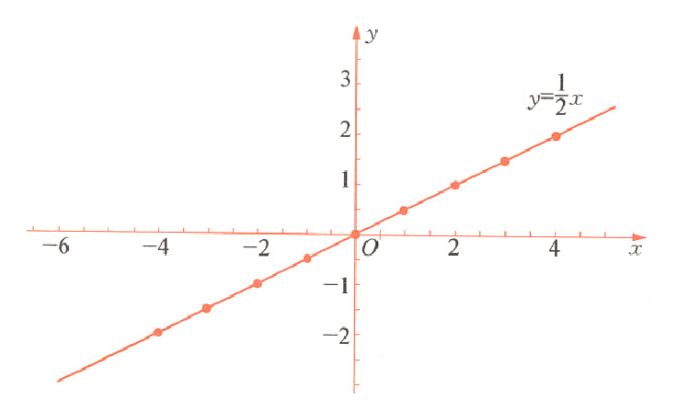
(1)列表：取自变量的一些值，计算出相应的函数值.如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | … | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
| *y*=*x* | … | -2 |  | -1 |  | 0 |  | 1 |  | 2 | … |

(2)描点：分别以所取*x*的值和相应的函数值作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

(3)连线：用光滑曲线(包括直线)把描出的这些点按照横坐标由小到大的顺序联结起来.

函数的图像如图20.2.1所示.



从中可以发现，一次函数*y*=*kx*+*b*(*b*≠0)的图像可由正比例函数*y*=*kx*的图像平移得到.当*b*>0时，向上平移*b*个单位；当*b*<0时，向下平移|*b*|个单位.

更进一步，如果*b*1≠*b*2，那么直线*y*=*kx*+*b*1与直线*y*=*kx*+*b*2平行.反过来，如果直线*y*=*k*1*x*+*b*1与直线*y*=*k*2*x*+*b*2平行，那么*k*1=*k*2，*b*1≠*b*2.

←可利用直线*y*=*kx*和平行线的传递性进行说理.

**【变式训练】**

1．不画函数的图像，判断函数*y*=3*x*-2的图像与函数*y*=3*x*的图像有什么关系．

[解析]由两个函数解析式中的*k*的值相等，可判断两个函数的图像平行，即其中一条直线是由另一条直线平移得到的.

[解]因为*y*=3*x*-2与*y*=3*x*的*k*的值都为3且常数项不相等，所以这两个函数的图像互相平行，

即直线*y*=3*x*-2是由直线*y*=3*x*向下平移2个单位长度得到的.

[点评]*y*=*kx*+*b*中，当*b*>0时，可看作是直线*y*=*kx*向上平移*b*个单位长度；当*b*<0时，可看作是直线*y*=*kx*向下平移|*b*|个单位长度.

2．一次函数*y*=3*x*-1的图像平行于直线( )．

(A)*y*=2*x*+1 (B)*y*=3*x*+1 (C)*y*=-3*x*+1 (D)*y*=-2*x*+1

答案：B

3．一次函数的图像经过点(2，1)，且平行于直线*y*=2*x*-1，则此函数的解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*y*=2*x*-3

4．已知一次函数的图像与直线平行，它与*x*轴的交点到原点的距离为3，那么这个一次函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*y*=或

5．若直线*y*=*kx*+*b*与直线*y*=2*x*-3无交点，且直线*y*=*kx*+*b*的截距为-9，求这个一次函数的解析式．

答案：*y*=2*x*-9

**例7：**若把函数*y*=2*x*的图像向下平移2个单位，再向左平移1个单位，求平移后的函数解析式.

答案：*y*=2(*x*+1)-2=2*x*

**【变式训练】**

1．要使直线向上平移后经过点(2，3)，那么直线应向上平移( )个单位．

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

答案：D

2．要使直线*y*=2*x*+1向下平移后经过点(2，-3)，那么直线应向下平移( )个单位．

(A)62 (B)73 (C)8 (D)9

答案：C

**二、一次函数的性质**

**例8：一次函数的增减性**

(1)已知函数：①*y*=-3*x*+1；②*y*=2*x*；③*y*=*x*-1；④*y*=．在这些函数中，函数值*y*随自变量*x*的值增大而增大的函数有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)函数①*y*=-3*x*；②*y*=5*x*+1中，函数值*y*随自变量*x*的增大而减小的函数有\_\_\_\_\_\_\_\_．(填编号)

答案：①③

(3)已知一次函数*y*=*kx*-3，函数值*y*随自变量*x*的增大而增大，则*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*k*>0

(4)一次函数*y*=(2*m*-3)*x*+3*m*-2的函数值*y*随*x*的增大而减小，则*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*m*<

(5)在直线*y*=-4+(*k*2+1)*x*中，*y*随*x*的减小而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，在*y*轴上的截距是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：减小；-4

**例9：**若直线*y*=*mx*+*m*2-*m*的截距为2，且函数值*y*随自变量*x*的增大而增大，求*m*的值及解析式．

答案：*m*2-*m*-2=0，得*m*=2，*m*=-1(舍)，*y*=2*x*+2

**【变式训练】**

已知一次函数*y*=(6+4*m*)*x*+(2*n*-1)．

(1)当*m*、*n*为何值时，函数值是正比例函数？

(2)当*m*、*n*为何值时，函数值*y*随自变量*x*的增大而增大？

(3)当*m*、*n*为何值时，函数值*y*随自变量*x*的增大而减小？

答案：(1)*m*≠>-*n*为任意实数；(3)*m*<-*n*为任意实数

**例10：一次函数的位置特征**

一次函数*y*=*kx*+*b*中，*y*随*x*的增大而减小，且*kb*<0，则图像经过哪些象限？

[解]由*y*随*x*的增大而减小可知*k*<0.又因为*kb*<0，所以*b*>0，即一次函数图像与*y*轴的交点位于原点上方，且*y*随*x*的增大而减小，即图像是由左向右下降的，因此图像经过第一、二、四象限.

[点评]在一次函数*y*=*kx*+*b*中，*k*的符号确定函数值随自变量的变化而变化的规律，*k*和*b*的符号共同决定函数图像所经过的象限.

**【变式训练】**

1．已知一次函数图像交于*y*轴负半轴，且*y*随*x*的增大而增大，则图像经过第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限．

答案：一、三、四

2．已知一次函数*y*=*kx*-*k*，若*y*随*x*的增大而增大，则下列说法中正确的个数是( )．

①图像一定经过一、二、三象限； ②图像一定经过一、三、四象限；

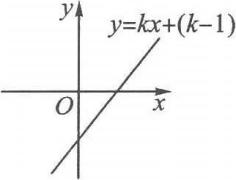
③图像不经过原点； ④图像交于*y*轴正半轴．

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：B

**例11：**如果一次函数*y*=*kx*+(*k*-1)的图像经过第一、三、四象限，则*k*的取值范围是( )．

A．*k*>0 B．*k*<0 C．0<*k*<1 D．*k*>1

[解析]由题意画出如图所示的图像，可知直线呈上升趋势，∴*k*>0.又直线与*y*轴的负半轴相交，∴*k*-1<0，即*k*<1.∴0<*k*<1.

[答案]C

[点评]借助函数的图像，利用数形结合思想，运用函数的有关性质解决问题，是我们求解此类问题的重要方法.

**【变式训练】**

1．若一次函数*y*=5*x*+*b*的图像不经过第二象限，则*b*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：≤0

2．已知一次函数*y*=(*m*-1)*x*+*m*-4不经过第二象限，求*m*的取值范围．

答案：1<*m*≤4

**例12：**直线*y*=(*m*+1)*x*+*m*2+1与*y*轴的交点坐标是(0，3)，且直线经过第一、二、四象限，求*m*的值．

答案：解得*m*=-

**【变式训练】**

一次函数*y*=*ax*+2*a*2-3的图像在*y*轴上的截距为5，且不经过第四象限，求该函数解析式．

答案：解得*a*=2，所以解析式是*y*=2*x*+5

**同步训练**

**一、填空题**

1．直线*y*=-9*x*-1与*x*轴的交点坐标为\_\_\_\_\_\_\_，与*y*轴的交点坐标为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(-，0)；(0，-1)

2．已知直线经过点(2，-1)，截距是-3，则这条直线表达式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*y*=*x*-3

3．已知直线*y*=-2*x*-1上有点*P*(1，*m*)，则点*P*到*x*轴的距离为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：3

4．一次函数的图像经过点(2，1)，且平行于直线*y*=-2*x*-1，则此函数的解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*y*=-2*x*+5

5．已知直线*y*=(*m*-1)*x*+*m*与直线平行，则*m*=\_\_\_\_\_\_．

答案：

6．把直线沿*y*轴向上平移5个单位，可得直线的解析式\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

7．写出下列一次函数的函数值*y*随*x*的变化趋势及它所经过的象限．

(1)*y*=2*x*，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_，它一定经过第\_\_\_\_\_象限；

(2)*y*=3*x*-1，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_，它一定经过第\_\_\_\_\_象限；

，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，它一定经过第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；

，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，它一定经过第\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限

*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，它一定经过第\_\_\_\_\_\_\_象限；

(6)*y*=*kx*+*b*，

①当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而增大；

②当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而减小；

③当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而增大，且经过原点；

④当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而减小，且经过原点；

⑤当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而增大，且经过第二象限；

⑥当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而减小，且经过第三象限；

⑦当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而增大，不经过第四象限；

⑧当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随*x*的增大而减小，不经过第一象限．

答案：(1)增大；一、三；(2)增大；一、三、四；(3)减小；二、三、四；(4)减小；一、二、四；(5)增大；一、二、三；(6)①*k*>0；②*k*<0；③*k*>0，*b*=0；④*k*<0，*b*=0；⑤*k*>0，*b*>0；⑥*k*<0，*b*<0；⑦*k*>0，*b*≥0；⑧*k*<0，*b*≤0

8．若则一次函数*y*=*abx*+*ac*的图像经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限

答案：一、二、四

**二、选择题**

9．在同一直角坐标系中，对于函数：①*y*=-*x*-1；②*y*=*x*+1；③*y*=-*x*+1；④*y*=-2(*x*+1)的图像，下列说法正确的是( )．

(A)通过点(-1，0)的是①③ (B)交点在*y*轴上的是②④

(C)相互平行的是①③ (D)关于*x*轴对称的是②③

答案：C

10．如果*kb*<0且*k*<0，那么函数*y*=*kx*+*b*的大致图像是( )．

Image6

答案：D

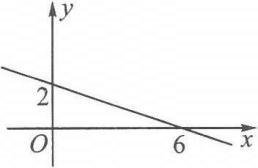
**三、解答题**

11．已知一次函数

(1)在直角坐标系中画出它的图像；

(2)写出它与两坐标轴的交点坐标；

(3)求出这条直线与坐标轴围成的三角形的面积.

答案：(1)令*x*=0，得*y*=2；令*y*=0，得*x*=6.所以直线过点(0，2)和点(6，0)，函数草图如图所示.

(2)当*y*=0时，*x*=6；当*x*=0时，*y*=2，所以它与*x*轴交于(6，0)，与*y*轴交于(0，2).

12．若直线*y*=*mx*+*m*2+3的截距为4，且*y*随*x*的增大而减小，求该直线的解析式．

答案：*y*=-*x*+4

13．一个一次函数的图像与直线平行，与*x*轴、*y*轴的交点分别为*A*、*B*，并且过点(-1，-25)．试探究：在线段*AB*上(包括端点*A*、*B*)横坐标、纵坐标都是整数的点有几个，并写出这些点的坐标．

答案：设这个一次函数为因其图像经过点(-1，-25)，所以有解得所以这个一次函数的解析式为令*y*=0，得*x*=19，所以点*A*的坐标为(19，0)，令*x*=0，得*y*=，所以点*B*的坐标为.一次函数整理后得，又知0≤*x*≤19，所以当取*x*=3，7，11，15，19时，*y*为整数，其值为-20，-15，-10，-5，0.因此，在线段*AB*上(包括端点*A*、*B*)横坐标、纵坐标都是整数的点有5个，其坐标分别为(3，-20)，(7，-15)，(11，-10)，(15，-5)，(19，0).

**走进中考**

**1．**(2017·上海中考) 如果一次函数*y*=*kx*+*b*（*k*、*b*是常数，*k*≠0）的图像经过第一、二、四象限，那么*k*、*b*应满足的条件是( )

(A)*k*>0，且*b*>0； (B)*k*<0，且*b*>0；

(C)*k*>0，且*b*<0； (D)*k*<0，且*b*<0．

答案：B